1. Определение и свойства степени с натуральным показателем

Чтобы обобщить понятие о показателе степени, вспомним, что такое степень.

$a^n = \mathrm{a} * \mathrm{a} * \ldots . * \mathrm{a}$ – степень с натуральным показателем, здесь а – основание степени, n – показатель степени;

n штук

Кроме того, напомним, что:

$\mathrm{a}^1 = \mathrm{a}$ и $\mathrm{a}^0 = 1$ при $\mathrm{a} \neq 0$;

Выражение 0^0 не существует.

$\mathrm{a}^{-n} = \frac{1}{a^n}$ – по определению, $\mathrm{a} \neq 0, n \in N$

Основные свойства степеней:

1. $a^n a^k = a^{n+k}$;

Для того чтобы умножить степени с одинаковым основанием, нужно сложить их показатели, основание оставить тем же самым.

2. $\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$ при $n \geq k, \mathrm{a} \neq 0$;

Можно разделить степени с одинаковым основанием, для этого их показатели нужно вычесть, а основание оставить тем же самым;

3. $(a^n)^k = a^{n*k}$;

Для того чтобы степень возвести в степень, нужно перемножить показатели степени, основание оставить без изменений.

4. $a^n b^n = (ab)^n$;

При умножении степеней с одинаковым показателем, нужно перемножить основания и возвести результат в исходную степень;

5. $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n, b \neq 0$;

2. Основные числовые множества, числовой ряд

Чтобы разделить степени с одинаковыми показателями, нужно разделить основания и возвести результат в исходную степень;

Напомним основные числовые множества:

$N\{1,2,3 \dots\}$ – натуральные числа;

$Z\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots\}$ – целые числа;

$Q\left\{\pm \frac{8}{3}, \pm 17, \dots \frac{m}{n}, m \in Z, n \in N\right\}$ – рациональные числа;

Числа, которые не могут быть представлены в виде дроби $\frac{m}{n}, m \in Z, n \in N$, назвали иррациональными, например $\sqrt{2}$. Если к множеству рациональных чисел прибавить множество иррациональных чисел, получим множество действительных чисел

$R\left\{\pm \frac{3}{8}, \pm \sqrt{2}, \pm \sqrt[5]{4}, \dots - \infty < x < \infty\right\}$ – действительные числа;

Напомним связь между множеством действительных чисел и числовой осью. Между множеством действительных чисел и множеством точек числовой оси существует взаимооднозначное соответствие. То есть, если мы говорим, что есть число $\sqrt{2}$, то ему на оси соответствует единственная точка. Точно так же каждой точке соответствует единственное действительное число.

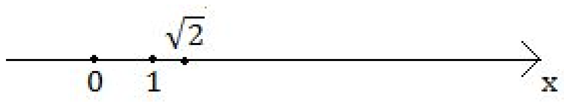

Рис. 1. Числовая ось

3. Степень с положительным рациональным показателем, примеры

Определение:

Степенью неотрицательного числа а с рациональным положительным показателем $r = \frac{m}{n} (m \in N, n \in N, n > 1)$ называется число $\sqrt[n]{a^m}$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Например: $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2^1} = \sqrt[3]{2}, 5^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{5^7}, 0^{\frac{3}{3}} = \sqrt[3]{0^2} = 0, 0^r = 0 \text{ при } r > 0$

Пример 1 – вычислить:

$$64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Пример 2 – вычислить:

$$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$$

Пример 3 – вычислить:

$$0^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{0^5} = 0$$

Пример 4 – представить в виде степени:

$$\sqrt[7]{2} = 2^{\frac{1}{7}}$$

Пример 5 – представить в виде степени:

$$\sqrt[3]{4{,}1} = (4{,}1)^{\frac{1}{3}}$$

Пример 6 – представить в виде степени:

$$\sqrt[6]{32} = \sqrt[6]{2^5} = 2^{\frac{5}{6}}$$

Пример 7 – представить в виде степени:

$$\sqrt[3]{2^7} = 2^{\frac{7}{3}}, a \geq 0$$

4. Степень с отрицательным рациональным показателем, примеры

Определение:

Степенью положительного числа a с рациональным отрицательным показателем $r = -\frac{m}{n} \, (m \in N, n \in N, n > 1)$ называется число $\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$.

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Например: $2^{-\frac{1}{8}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{8}}} = \frac{1}{\sqrt[8]{2}}; 5^{-\frac{4}{8}} = \frac{1}{5^{\frac{4}{8}}} = \frac{1}{\sqrt[8]{5^4}}$

Пример 8 – вычислить:

$$64^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{64^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}$$

Пример 9 – вычислить:

$$4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4^3}} = \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}$$

Пример 10 – вычислить:

$$0^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{0^{\frac{5}{4}}} = \emptyset$$

5. Типовые ошибки и важные факты

Обратим внимание на типовую ошибку. Вычислить:

$(-8)^{\frac{1}{3}}$

Ответ: не существует

Пояснение:

$(-8)^{\frac{1}{3}} \neq \sqrt[3]{-8} = -2$ – выражение 1;

Данное равенство неверно, так как наше определение не должно противоречить определениям, данным ранее, например основному свойству дроби:

$(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$ – выражение 2;

Из выражений 1 и 2 получили $-2 = 2$, неверное числовое равенство.

Запомним:

$x^{\frac{m}{n}}$ определено только при $x \geq 0$.

6. Типовые задачи на область определения функции

Пример 11 – построить графики функций:

$y_1 = \sqrt[3]{x}, y_2 = x^{\frac{1}{3}}$

График первой функции нам известен, он проходит через три фиксированные точки: (0;0), (1;1) и (-1;-1), область определения $D(x): (-\infty; +\infty)$.

График второй функции по определению соответствует графику функции $y = \sqrt[3]{x}$ при $x \geq 0$.

Отличие заданных функций наглядно продемонстрировано на графиках 2 и 3.

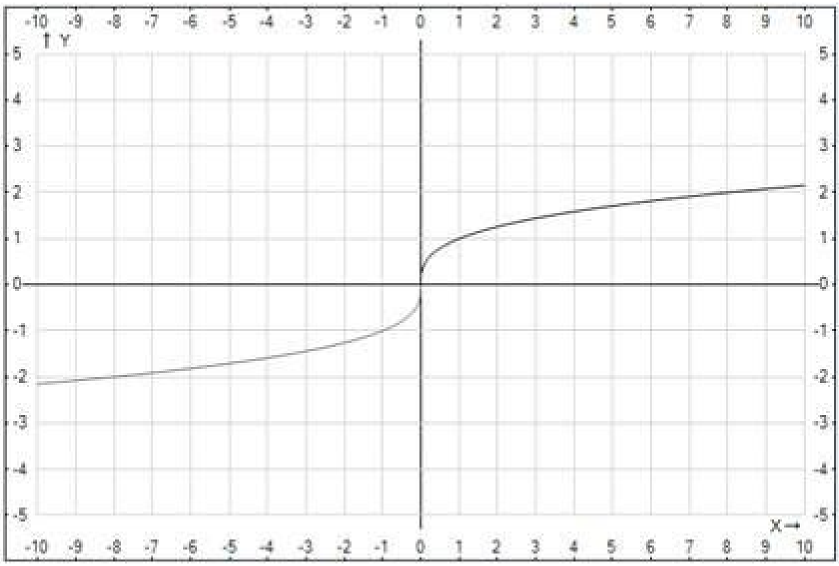

Рис. 2. График функции $y_1 = \sqrt[3]{x}$

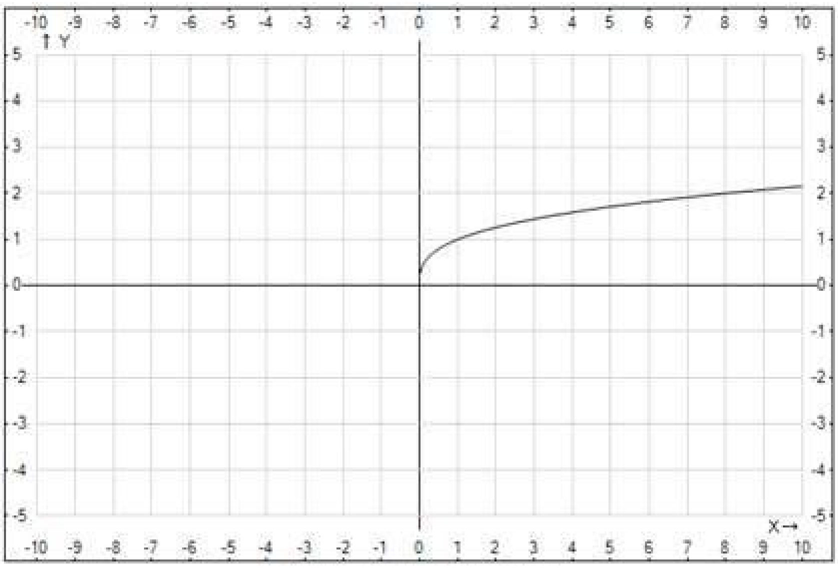

Рис. 3. График функции $y_2 = x^{\frac{1}{3}}$

Пример 12 – найти область определения выражения:

$(x+1)^{\frac{2}{7}}$

По определению положительного рационального показателя степени:

$x+1 \geq 0$, отсюда $x \geq -1$

$(x+1)^{-\frac{2}{7}}$

По определению отрицательного рационального показателя степени:

$x+1 > 0$, отсюда $x > -1$

$x^{\frac{5}{3}}$

По определению положительного рационального показателя степени:

$x \geq 0,$

$x^{-\frac{5}{3}}$

По определению отрицательного рационального показателя степени:

$x > 0$

Итак, мы рассмотрели понятие степени с рациональным показателем, дали важные определения. На следующем уроке мы рассмотрим свойства таких степеней.

Список литературы

1. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. – М.: Мнемозина.
2. Муравин Г.К., Муравина О.В. Алгебра и начала математического анализа. – М.: Дрофа.
3. Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П. и др. Алгебра и начала математического анализа. – М.: Просвещение.

Домашнее задание

1. Алгебра и начала анализа, 10–11 класс (А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын) 1990, № 430, 431, 436, 437;

2. Вычислить:

а) $49^{\frac{1}{2}}$; б) $1000^{\frac{1}{3}}$; в) $27^{\frac{1}{3}}$; г) $25^{\frac{1}{2}}$; д) $9^{2\frac{1}{2}}$; е) $0{,}16^{1\frac{1}{2}}$; ж) $(3\frac{3}{8})^{\frac{4}{3}}$; з) $0{,}001^{\frac{2}{3}}$

3. Вычислить:

а) $(27 * 3^{-4})^2$; б) $16 * (2^{-3})^2$; в) $\frac{6^{-4}6^{-9}}{6^{-12}}$; г) $\frac{7^{-7}7^{-8}}{7^{-13}}$